



Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of some Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author's version published in: <https://oatao.univ-toulouse.fr/23801>

Official URL : <https://doi.org/10.1112/S0024609302001698>

To cite this version :

Trilles, Sébastien Topologie des (M-2) Courbes réelles symétriques. (2003) Bulletin of London Mathematical Society, 35 (2). 161-178. ISSN 1469-2120

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:

tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUES

SÉBASTIEN TRILLES

ABSTRACT

Let X be a non-singular real algebraic curve in \mathbb{CP}^2 of even degree. In this paper a refinement is proved of a theorem of Kharlamov about $(M - 2)$ -curves that are invariants under the projective involution. In particular, if the $(M - 2)$ -symmetric curve X satisfies the Arnold congruence, then either X or its twin is a separating curve.

1. Introduction

Dans cet article on s'intéresse aux courbes algébriques lisses de degré donné d dans le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 , c'est-à-dire au lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré d en trois variables et dépourvu de singularités dans $\mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$. La topologie d'une telle courbe X est celle d'une surface de Riemann dont le genre est donné par la formule bien connue $g = (d - 1)(d - 2)/2$.

Si l'on restreint les variables du polynôme à être réelles, on récupère topologiquement dans le plan réel \mathbb{RP}^2 une union de cercles plongés, notés $X_{\mathbb{R}}$, issus de la coupure entre la surface de Riemann et le plan réel. Harnack [7] a montré que le nombre de ces cercles ne dépasse jamais $M = g + 1$, et cette borne est exacte puisqu'il décrit un algorithme géométrique pour construire en tous les degrés des courbes ayant ce nombre M d'ovales. Lorsque le degré d est pair, les composantes de $X_{\mathbb{R}}$ sont homotopes à un point dans \mathbb{RP}^2 . On les appelle les *ovales*. Si le degré est impair, la courbe contient alors une seule composante isotope aux droites \mathbb{RP}^1 de \mathbb{RP}^2 , appelée *pseudo-droite*. Un ovale est dit *pair* s'il est entouré d'un nombre pair d'autres ovales. On note p le nombre d'ovales pair et n celui des ovales impairs i.e. les autres. Une courbe $X_{\mathbb{R}}$ est dite *séparante* si l'ensemble $X \setminus X_{\mathbb{R}}$ est formé de deux moitiés automatiquement échangées par la conjugaison complexe 'conj', qui envoie le point de coordonnée homogène $[z_0 : z_1 : z_2]$ sur le point $[\overline{z_0} : \overline{z_1} : \overline{z_2}]$. Par exemple, les courbes maximales sont séparantes. On parlera de *schéma séparant* (respectivement *non séparant*) pour une configuration d'ovales dans le plan projectif qui est réalisable uniquement par des courbes algébriques séparantes (respectivement non séparantes). A partir du degré cinq on rencontre des configurations qui admettent des réalisations séparantes et non séparantes. On dit alors que le schéma est de type *indéfini*. Il existe des liens étroits entre cette propriété de séparabilité et la différence $p - n$, autrement dit avec le type d'emboîtement des ovales.

En 1971, Rokhlin [10] prouve que les courbes maximales (également appelées *M-courbes*) de degré $2k$ vérifient la congruence $p - n \equiv k^2 \pmod{8}$ conjecturée par Gudkov [5] (voir aussi le très bon survey de Wilson [15]). Plus tard Kharlamov [9]

montre pour une $(M - 2)$ -courbe de degré $2k$, qu'il suffit de vérifier la congruence $p - n \equiv k^2 + 4 \pmod{8}$ pour qu'elle soit séparante.

Dans ce papier nous étudions les courbes réelles algébriques de degré pair munies d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur de ce groupe sera l'involution projective de \mathbb{CP}^2 , noté -1 , qui envoie le point $[z_0 : z_1 : z_2]$ sur le point $[-z_0 : z_1 : z_2]$.

L'espace $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ étant simplement connexe, toute courbe X est rigidement isotope à $-1(X) = -X$. Autrement dit, l'involution -1 préserve les composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{RP}^{d(d+3)/2} \setminus \mathcal{D}$ de toutes les courbes réelles de degré d privées du lieu des courbes à singularités réelles.

DÉFINITION 1. Une courbe réelle algébrique X est dite *symétrique* si $-X = X$.

L'espace des courbes symétriques est non vide : la courbe de Harnack peut être contruite de manière symétrique en tous les degrés. Plus généralement si une composante connexe \mathcal{M} de $\mathbb{RP}^{d(d+3)/2} \setminus \mathcal{D}$ est contractile alors elle contient une courbe symétrique. Ceci est une conséquence de la théorie de Smith : puisque -1 préserve \mathcal{M} on a la relation

$$\dim H_*(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) \equiv \dim H_*(\mathrm{Fix}(-1), \mathbb{Z}_2) \pmod{2}$$

où $\mathrm{Fix}(-1)$ est l'ensemble des courbes symétriques de \mathcal{M} . Si \mathcal{M} est contractile alors :

$$\dim H_*(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) = \dim H_*(\mathrm{pt}, \mathbb{Z}_2) = 1$$

ce qui implique que $\mathrm{Fix}(-1)$ est non vide.

En 1994 Fiedler [4] prouve que toute M -courbe symétrique vérifie la congruence $p - n \equiv k^2 \pmod{16}$ (raffinement du résultat de Rokhlin), ce qui montre en particulier que les composantes connexes de $\mathbb{RP}^{d(d+3)/2} \setminus \mathcal{D}$ ne contiennent pas toujours une courbe symétrique. Nous nous proposons d'énoncer un raffinement du théorème de Kharlamov dans le cadre des courbes symétriques. On en déduira que les $(M - 2)$ -courbes symétriques séparantes sont encore plus rares.

Puisque les involutions conj et -1 commutent, l'involution antiholomorphe $-1 \circ \mathrm{conj}$ définit sur \mathbb{CP}^2 une autre structure réelle qui fixe le plan réel :

$$\widetilde{\mathbb{RP}}^2 = \{[x_0 : tx_1 : tx_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)\}.$$

Les deux plans réels \mathbb{RP}^2 et $\widetilde{\mathbb{RP}}^2$ sont échangés l'un et l'autre par l'homéomorphisme d'ordre quatre :

$$t : [x_0 : x_1 : x_2] \longmapsto [tx_0 : x_1 : x_2].$$

Le lieu des points communs de ces deux plans est l'ensemble des points fixes de -1 , formé de la partie réelle $G_{\mathbb{R}}$ définie par l'équation $x_0 = 0$, et du point $\kappa = [1 : 0 : 0]$. Si X est une courbe symétrique réelle pour la structure réelle définie par conj alors elle est réelle pour la structure réelle définie par $-1 \circ \mathrm{conj}$. En particulier, si X est non singulière alors $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} = X \cap \widetilde{\mathbb{RP}}^2$ est une courbe réelle non singulière. On appelle le plan \mathbb{RP}^2 le *plan miroir* de \mathbb{RP}^2 et la courbe $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ la *courbe miroir* de $X_{\mathbb{R}}$ (voir la Figure 1 pour une illustration sur la courbe d'Harnack symétrique de degré six).

Une droite symétrique réelle pour la structure réelle conj dans \mathbb{CP}^2 (c'est-à-dire une droite réelle passant par κ) est aussi une droite symétrique réelle pour la nouvelle structure définie par $-1 \circ \mathrm{conj}$. En conséquence un pinceau de droites passant par le point κ réelle pour \mathbb{RP}^2 est aussi un pinceau de droites réelles passant par κ sur $\widetilde{\mathbb{RP}}^2$.

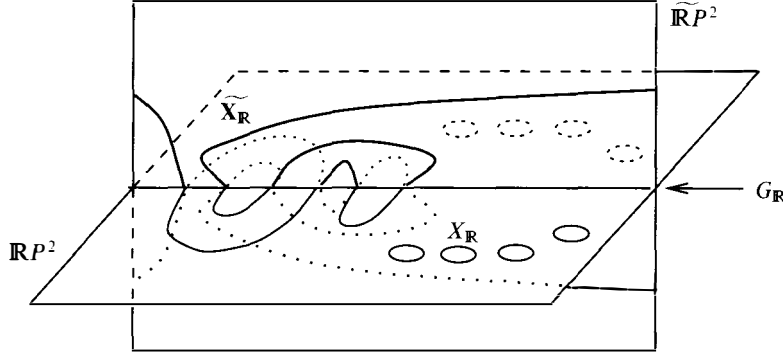


FIGURE 1. Courbe de Harnack symétrique de degré six.

On en déduit que les ovals de \widetilde{X}_R invariants par -1 sont les *chaînes* de points complexes (voir [3]) pour la définition de chaînes) qui relient les ovals invariants de X_R .

2. L'espace ambiant des courbes symétriques

Dans cette section on reconnaît la surface réglée F_2 comme l'espace ambiant des courbes symétriques.

Les surfaces réglées F_n sont des fibrés en droites complexes sur une droite complexe. Elles se construisent par récurrence à partir du produit $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$: on éclate le point d'intersection entre une fibre et le diviseur exceptionnel puis on contracte la transformée stricte de la fibre. On construit ainsi la surface F_n par une suite successive de n transformations birationnelles $F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n$. Ces surfaces admettent une structure réelle via l'involution conj. L'ensemble des points fixes de cette involution, appelée *partie réelle* se fibre en cercle sur un cercle. C'est un tore si n est pair et une bouteille de Klein si n est impair : cela se voit en suivant les éclatements successifs du tore réel de F_0 . On peut procéder autrement en remarquant que la première classe de Stiefel-Whitney w_1 de la partie réelle est la réduction modulo deux de la première classe de Chern $c_1 = n \in H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z})$ du fibré ambiant F_n . Ainsi pour n pair $w_1 = 0 \in \mathbb{Z}_2$, donc le fibré est orientable puisque la première classe de Stiefel-Whitney est une obstruction à l'orientation. On obtient donc le tore. Pour n impair, $w_1 = 1 \in \mathbb{Z}_2$, donc le fibré est une bouteille de Klein (il y a seulement deux fibrés en cercles sur un cercle à isomorphisme de fibré près).

LEMME 2. *Il y a une application bien définie entre l'ensemble des courbes réelles symétriques de \mathbb{CP}^2 et les courbes réelles de F_2 .*

Preuve. L'involution -1 agit comme une rotation sur chaque droite passant par κ . Eclatons \mathbb{CP}^2 en ce point (faire topologiquement la somme connexe \mathbb{CP}^2 avec $\overline{\mathbb{CP}^2}$ en κ). On obtient ainsi la surface réglée F_1 , c'est-à-dire un fibré en droites complexes sur la base $\mathbb{CP}^1 \approx G$ avec la correspondance : fibre de $F_1 \longleftrightarrow$ droite de \mathbb{CP}^2 passant par κ . Le diviseur exceptionnel de F_1 provenant de l'éclatement est la droite complexe $\overline{\mathbb{CP}^1} \approx \overline{G} = D$. L'involution -1 se prolonge naturellement à la surface réglée F_1 : elle laisse fixe la droite G , le diviseur D et agit comme une rotation sur chaque fibre L . On reconnaît la bouteille de Klein réelle de F_1 comme

la somme connexe de $\mathbb{R}P^2$ et $\overline{\mathbb{R}P^2}$ en κ ; la fibration est donnée par les coupures $L \cap KI^2 = L_{\mathbb{R}}$. Puisque -1 commute avec la conjugaison complexe, on récupère dans F_1 une bouteille miroir $\widetilde{KI^2}$ telle que $KI^2 \cap \widetilde{KI^2} = G_{\mathbb{R}} \cup D_{\mathbb{R}}$. Formons le quotient de F_1 par -1 . Comme l'involution -1 préserve la structure de fibré de F_1 , le quotient $F_1 / -1$ est aussi muni d'une structure de fibré en droites complexes. Autrement dit, $F_1 / -1 = F_n$ est aussi une surface réglée. Le calcul de l'entier n se fait en calculant l'auto-intersection de G dans $F_1 / -1$ par la formule du transfert homologique :

$$[G \circ G]_{F_1 / -1} = 2[G \circ G]_{F_1} = 2.$$

Donc $n = 2$. La partie réelle de F_2 s'obtient par le collage des anneaux $KI^2 / -1$ et $\widetilde{KI^2} / -1$. Ce tore se fibre par les cercles $L_{\mathbb{R}} / -1 \cup \widetilde{L}_{\mathbb{R}} / -1$.

Une courbe algébrique réelle symétrique de $\mathbb{C}P^2$ est envoyée en une courbe algébrique réelle symétrique de F_1 à l'aide de l'application rationnelle d'éclatement $\pi : F_1 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$. Le quotient d'une courbe algébrique réelle symétrique $\pi^{-1}(X)$ dans F_1 par -1 est encore une courbe algébrique réelle dans F_2 notée Y . \square

DÉFINITION 3. On appelle la courbe Y le *jumeau de la courbe symétrique* X .

Le groupe d'homologie entier $H_2(F_2, \mathbb{Z})$ est engendré par l'image dans F_2 de la droite de symétrie (notée encore G) et par une fibre L . Des calculs homologiques standards fournissent le lemme suivant.

LEMME 4. Soit X une courbe algébrique symétrique dans $\mathbb{C}P^2$ de degré d .

- (i) Si $d = 2k$ alors $[Y] = k[G] \in H_2(F_2, \mathbb{Z})$ et le genre de Y est $(M - k)/2$.
- (ii) Si $d = 2k + 1$ alors $[Y] = k[G] + [L] \in H_2(F_2, \mathbb{Z})$ et le genre de Y est $(M - 1 - k)/2$.

On obtient la partie réelle $Y_{\mathbb{R}}$ de Y sur le tore réel $T^2 \subset F_2$ par le collage de $X_{\mathbb{R}} / -1$ et de $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} / -1$ le long des points d'intersections $X_{\mathbb{R}} \cap G_{\mathbb{R}}$ (la Figure 2 représente le jumeau de la courbe en Figure 1). Les composantes de $Y_{\mathbb{R}}$ qui bordent un disque dans le tore réel sont appelés les *ovales*. Nous appelons *méridien* celles qui sont homotopes à la partie réelle $G_{\mathbb{R}}$. Si le degré d est pair, la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ ne contient que des ovales et des méridiens.

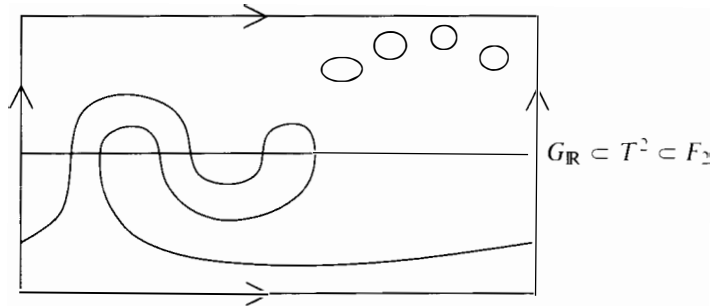


FIGURE 2. Jumeau de la courbe symétrique de Harnack.

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUE

LEMME 5. Si $X_{\mathbb{R}}$ et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ sont des courbes séparantes alors $Y_{\mathbb{R}}$ est une courbe séparante.

Preuve. L'ensemble $X \setminus (X_{\mathbb{R}} \cup \widetilde{X}_{\mathbb{R}})$ est composé de quatre morceaux. Donc le quotient $\tau(X) \setminus Y_{\mathbb{R}}$ est formé de deux morceaux conjugués. Ceci implique que $Y_{\mathbb{R}}$ est une courbe séparante. \square

Pour une courbe $X_{\mathbb{R}}$ donnée, la détermination du jumeau $Y_{\mathbb{R}}$ dépend entièrement de celle de la courbe miroir. Décrire la topologie de la courbe miroir n'est pas chose aisée puisqu'un même schéma symétrique peut admettre plusieurs types de courbes miroirs différents : par exemple le schéma $1\langle 1 \rangle$ symétrique de degré quatre admet les schémas $1\langle 1 \rangle$, $\langle 4 \rangle$, et $\langle 2 \rangle$ comme image miroir (voir [14] pour les notations). Le seul cas où la topologie de la courbe miroir reste fixe est celui des courbes symétriques maximales. Dans ce cas Fiedler a montré que l'image miroir est un *nid* de k ovales c'est-à-dire k ovales emboîtés, avec une pseudo-droite si le degré est impair.

3. Résultat principal

Nous commençons cette section par le simple et très important lemme suivant.

LEMME 6. Si X est une courbe réelle symétrique séparante de degré d alors $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 0$ ou d .

Preuve. Une involution qui préserve l'orientation sur une surface de Riemann agit toujours localement autour d'un point fixe comme une rotation. Si un point fixe de l'involution holomorphe -1 est réel, il échange les deux moitiés de $X \setminus X_{\mathbb{R}}$ ce qui implique que ces parties complexes soient dépourvues d'autres points fixes ; autrement dit ils sont tous réels. \square

Comme on s'intéresse aux $(M - 2)$ -courbes séparantes nous allons toujours supposer que l'intersection entre la $(M - 2)$ -courbe symétrique X et la droite de symétrie $G_{\mathbb{R}}$ est maximale.

THÉORÈME PRINCIPAL 7. Soit X une $(M - 2)$ -courbe symétrique de degré $2k$ et Y son jumeau. Si X vérifie la congruence d'Arnold : $p - n \equiv k^2 \pmod{4}$, alors l'une des deux courbes X ou Y au moins est séparante.

REMARQUES. Le fait que la courbe miroir soit ou non séparante permet d'affiner certaines propriétés. Dans ces remarques X note toujours une $(M - 2)$ -courbe symétrique de degré $2k$.

(1) Si parmi les trois courbes $X_{\mathbb{R}}$, $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ et $Y_{\mathbb{R}}$, deux sont séparantes alors la troisième l'est (ceci généralise le Lemme 5).

(2) On peut rencontrer des courbes X séparantes telle que la courbe miroir ainsi que le jumeau soient tous deux non séparants (voir dans les applications).

(3) Si la courbe miroir est non séparante et si le jumeau est séparant alors X est non séparante.

4. Application pour les courbes de degré six

Considérons les $(M - 2)$ -courbes de degré six de type indéfini de schémas réels $1\langle 8 \rangle$ et $\langle 9 \rangle$. Ces deux courbes vérifient la congruence $p - n \equiv 6 \pmod{8}$. Supposons

les symétriques telles que l'intersection avec la droite $G_{\mathbb{R}}$ soit maximale. Le nombre maximal de composantes pour le jumeau est 5. Détaillons le cas de la courbe ayant pour schéma $1\langle 8 \rangle$.

Les seuls schémas miroirs possibles pour la courbe $1\langle 8 \rangle$ sont les schémas : $1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$, $1\langle 2 \rangle$ et $1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$. Pour le schéma séparant $1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$, le jumeau contient 5 composantes autrement dit il est maximal donc séparant. Le premier point de la remarque dit que la courbe est séparante. Pour le schéma non séparant $1\langle 2 \rangle$, le jumeau ne contient que quatre composantes, donc il n'est pas séparant. Le théorème dit alors que la courbe $1\langle 8 \rangle$ est séparante. Pour le schéma non séparant $1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$, le jumeau est séparant car maximal. Le point trois de la remarque dit que $X_{\mathbb{R}}$ ne peut être séparant. En résumé :

- (i) si $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in \{1\langle 2 \rangle, 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle\}$ alors $1\langle 8 \rangle$ est séparant ; si $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} = 1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$ alors $1\langle 8 \rangle$ est non séparant ;
- (ii) si $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in \{\langle 3 \rangle, 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle\}$ alors $\langle 9 \rangle$ est séparant ; si $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} = 1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$ alors $\langle 9 \rangle$ est non séparant.

Nous représentons en Figure 3 la construction de la configuration séparante de $\langle 9 \rangle$ dont l'image miroir est hyperbolique (voir aussi [10]).

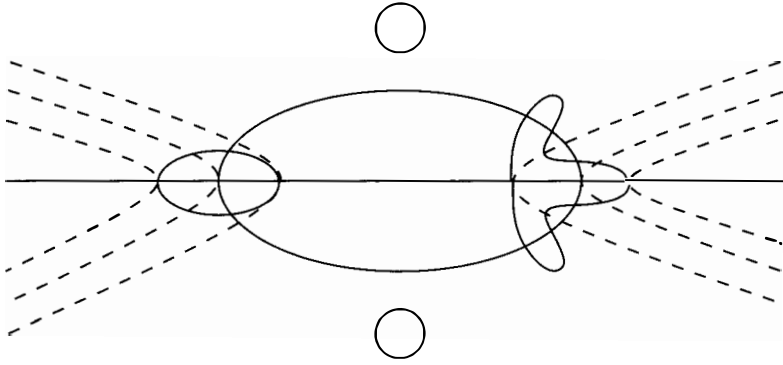


FIGURE 3. Construction symétrique du schéma $\langle 9 \rangle$.

Indiquons aussi comment le schéma miroir $1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$ arrive. Partons de la courbe de Hilbert symétrique : $1 \sqcup 1\langle 9 \rangle$. Contractons l'ovale extérieur de façon symétrique, puis attirons l'un vers l'autre une paire d'ovales symétrique de manière à obtenir un point double non isolé sur l'axe pour créer un ovale invariant. Ce processus produit le schéma symétrique $1\langle 8 \rangle$ non séparant et il est facile de suivre les opérations dans le plan miroir pour voir que $\widetilde{X}_{\mathbb{R}} = 1 \sqcup 1\langle 1 \rangle$. Voir la Figure 4.

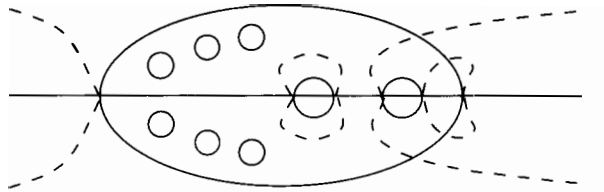


FIGURE 4. Construction symétrique du schéma non séparant $1\langle 8 \rangle$.

La classification des courbes symétriques de degré six a été obtenue récemment par I. Itenberg (voir [10]). En fait on obtient toutes les informations sur la topologie des courbes de degré six en utilisant la théorie des surfaces K_3 . La surface en question est le revêtement double du plan projectif complexe branché le long d'une courbe de degré six. Signalons enfin le travail de Zvonilov [16] qui obtint des congruences pour les courbes dans les hyperboloïdes, objets topologiquement équivalents aux surfaces réglées F_{2k} .

5. Idée de la preuve

Le travail principal consiste à décrire la topologie du jumeau, autrement dit à déterminer la courbe miroir. Pour cela nous allons réduire cette recherche à l'étude des involutions sur une certaine surface Σ , construite avec la courbe X . Puis nous construisons une autre surface (appelée surface d'Arnold [1]) dans l'espace $F_2/\text{conj} \simeq S^4$ avec la moitié Y/conj et des régions appropriées du tore réel T^2 dans F_2 , à laquelle on applique le célèbre théorème de Guillou–Marin [6]. Nous remontons ensuite les congruences obtenues à la courbe X de \mathbb{CP}^2 où un petit lemme combinatoire nous sera bien utile. Nous dégagerons quatre propositions qui décriront l'ensemble de la situation topologique. Notre hypothèse $p - n \equiv k^2 \pmod{4}$ va violer une de ces propositions.

Si $x \in X$ on note $\bar{x} = \{x, \text{conj } x\}$ sa classe d'équivalence dans X/conj . Puisque -1 commute avec la conjugaison complexe, elle induit un involution, notée encore -1 , sur le quotient X/conj .

En particulier, -1 agit sur le bord $X_{\mathbb{R}}$ de trois façons possibles :

- (i) en échangeant deux cercles de $\partial(X/\text{conj})$;
- (ii) en agissant comme une rotation ($\alpha \mapsto \pi + \alpha$) sur chaque cercle de $\partial(X/\text{conj})$;
- (iii) en agissant comme la symétrie ($\alpha \mapsto \pi - \alpha$) sur chaque cercle de $\partial(X/\text{conj})$.

Collons abstraitement des disques le long du bord $X_{\mathbb{R}}$ pour obtenir une surface Σ , orientable ou pas suivant que $X_{\mathbb{R}}$ sépare sa complexifiée ou pas. L'action de -1 sur le bord $X_{\mathbb{R}}$ peut s'étendre à l'intérieur des disques de façon à obtenir une involution I sur Σ . On s'intéresse alors à l'ensemble des point fixes de I :

$$\bar{x} \in \text{Fix}(I) \Leftrightarrow (x \in \widetilde{X}_{\mathbb{R}} \text{ ou } x \in X \cup G).$$

Si \bar{x} est isolé dans $\text{Fix}(I)$ alors x est un point de coupure complexe entre X et G , dans les autre cas $x \in \widetilde{X}_{\mathbb{R}}$. La détermination de $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ entraîne celle de $\text{Fix}(I)$. La réciproque est vraie seulement dans le cas d'une courbe maximale.

On appelle *cercle fixe* une composante de dimension un de l'ensemble $\text{Fix}(I)$ sur Σ . Le nombre de cercle fixe est égal au nombre de composantes sur F_2 fournies par les ovales invariants par -1 des courbes $X_{\mathbb{R}}$ et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$.

La surface Σ est un tore si $X_{\mathbb{R}}$ est orientable et une bouteille de Klein sinon.

A conjugaison topologique près il y a trois involutions non triviales admettant des points fixes sur le tore (voir les articles de [2] et [13]) : l'involution hyperelliptique (la brochette qui fixe quatre points) et deux autres qui fixent respectivement un et deux cercles. Pour ce qui est de la bouteille de Klein il y a quatre involutions distinctes (toujours à conjugaison topologique près) : une involution hyperelliptique qui fixe deux points, une qui fixe deux points avec un cercle et deux autres fixant respectivement un et deux cercles.

LEMME 8. Soit X une $(M-2)$ -courbe symétrique de degré $2k$.

- (i) $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 2k ; \\ 2(k-2) \text{ autrement dit la courbe est non séparante ;} \\ 0 \text{ pour } k = 2, 3, 4. \end{cases}$
- (ii) Si $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 0$ et $k = 3$ ou 4 , la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est nécessairement séparante.

Preuve. Rappelons que deux points de coupures imaginaires conjugués entre X et G produisent un point fixe isolé de l'involution I sur Σ . Notons $x = \frac{1}{2} \text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}})$ et appliquons l'inégalité d'Harnack à la courbe Y :

$$\frac{M-2}{2} - \frac{x}{2} + c \leq \frac{M-2}{2} + 1$$

où c est le nombre de cercle fixes ($c = 1$ ou 2). On a $x \geq k + 2(c-2)$.

Si $c = 2$ alors $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 2k$. Si $c = 1$ alors $x \geq k-2$. Par conséquent $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 2k$ ou $2(k-2)$ car si l'intersection est égale à $2(k-1)$ le nombre d'ovales non invariant, c'est-à-dire échangés deux à deux par -1 , est $M-2-(k-1) = 2(k^2-2k)+1$ qui est impair et par conséquent il ne peut y avoir symétrie! Si $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 2(k-2)$ alors X est non séparante (voir le Lemme 6).

Si $\text{card}(G_{\mathbb{R}} \cap X_{\mathbb{R}}) = 0$ et $k = 3$ ou 4 , l'involution I doit admettre au moins k points fixes isolés. Donc I est conjugué à l'involution hyperelliptique sur le tore et par suite $X_{\mathbb{R}}$ est séparante. \square

6. Construction des surfaces d'Arnold, congruences pour les M et $(M-1)$ -courbes dans F_2

La construction de telles surfaces sera légèrement différente suivant la parité de k .

Si k est pair, la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ contient soit deux méridiens créés par les deux cercles fixes, ou bien uniquement des ovales. On appelle *bague* la partie du tore qui relie les deux méridiens et qui ne contient pas la trace réelle du diviseur exceptionnel $D_{\mathbb{R}}$. L'ensemble $T^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$ se sépare en deux collections T_+ et T_- de parties du tore T^2 telles que $T_+ \cap T_- = Y_{\mathbb{R}}$ et $D_{\mathbb{R}} \subset T_-$. On construit une surface lisse dans F_2 en lissant le cycle $Y^+ \cup T_+$ le long de $Y_{\mathbb{R}}$: c'est la surface d'Arnold.

Si k est impair, la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ ne contient qu'un seul méridien. On considère alors la courbe $Y.D$ d'homologie $[Y] + [D]$. La partie réelle de la courbe $Z = Y.D$ est $Z_{\mathbb{R}} = Y_{\mathbb{R}} \cup D_{\mathbb{R}}$. Faisons le choix d'une bague entre le méridien et $D_{\mathbb{R}}$. Les ensembles T_+ et T_- sont les parties du tore telles que $T_+ \cap T_- = Z_{\mathbb{R}}$ et T_+ contiennent la bague choisie. Le lissage du cycle $Z_+ \cup T_+$ fournit la surface souhaitée. On l'appelle surface d'Arnold de Y .

Après passage au quotient par conj , la surface d'Arnold de la courbe Y se plonge dans la sphère S^4 . Puisque $H_2(S^4, \mathbb{Z}) = 0$ toutes les surfaces sont caractéristiques dans S^4 . On applique alors la congruence de Guillou–Marin [6] pour la surface d'Arnold $A : [A \circ A]_{S^4} \equiv -2K(A) \pmod{16}$ où $K(A)$ est l'invariant de Brown à valeur dans \mathbb{Z}_8 associé à la forme quadratique q_A de Guillou–Marin.

6.1. Calcul de l'auto-intersection $[A \circ A]_{S^4}$

On commence par calculer l'auto-intersection de la surface d'Arnold dans F_2 . Pour cela on utilise un champ de vecteurs v tangent à T_+ et normal à $Y_{\mathbb{R}} = \partial T_+$ si k est pair et $Z_{\mathbb{R}}$ si k est impair. Le champ w est normal à T_+ et normal au bord ∂T_+ . On

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUE

étend ce champ en un champ de vecteurs normal à Y^+ , noté encore w , et on calcule la somme des indices des zéros de ce champ sur A . Ce nombre se compose de la somme $e(T_+) + \text{card}(Y^+ \circ Y^+)$ où $e(T_+)$ note le nombre normal d'euler de T_+ calculé dans le fibré normal de T_+ dans F_2 et $Y^+ \circ Y^+$ compte l'indice des zéros du champ sur Y^+ .

Après passage au quotient on a :

$$\begin{aligned} [A \circ A]_{S^4} &= e(T_+ \hookrightarrow S^4) + Y^+ \circ Y^+ \\ &= 2e(T_+ \hookrightarrow F_2) + \begin{cases} \frac{1}{2}k[G] \circ k[G] & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2}(k[G] + [D]) \circ (k[G] + [D]) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases} \\ &= -2\chi(T_+) + \begin{cases} k^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ k^2 - 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ ne contient que des ovals, on dit qu'un ovale est *pair* s'il est entouré par un nombre pair d'autres ovals. Il est dit *impair* autrement. Lorsque k est impair ou si $Y_{\mathbb{R}}$ contient deux méridiens, la définition précédente s'applique à tout ovale à l'extérieur de la bague ; un ovale à l'intérieur de la bague est dit *pair* s'il est entouré par un nombre impair d'autres ovals. Notons P , respectivement N , le nombre d'ovales pair, respectivement impair, de la courbe $Y_{\mathbb{R}}$. Clairement $e(T_+ \hookrightarrow F_2) = -(P - N)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} [A \circ A]_{S^4} &= -2(P - N) + k^2, & \text{si } k \text{ est pair ;} \\ [A \circ A]_{S^4} &= -2(P - N) + k^2 - 1, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

6.2. Calcul de l'invariant de Brown

Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est maximale, une moitié de la base symplectique du groupe $H_1(A \hookrightarrow S^4, \mathbb{Z})$ est visible sur le tore T^2 . Un exemple est donné en Figure 5 : α est visible tandis que β s'échappe du tore.

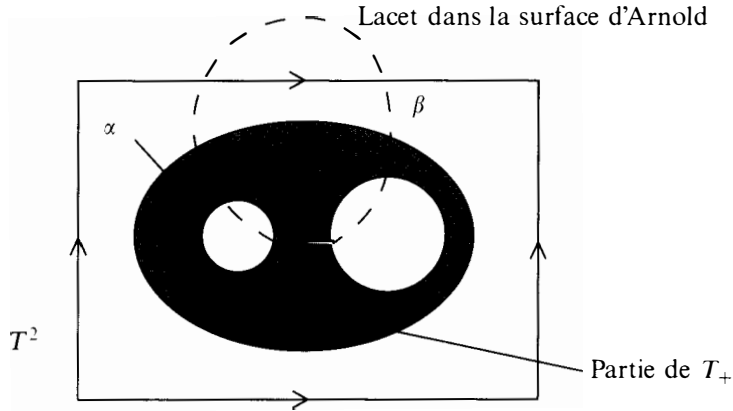


FIGURE 5. Deux éléments α et β du groupe $H_1(A \hookrightarrow S^4, \mathbb{Z})$.

Calculons l'image d'un générateur α (comme sur la Figure 4) par la forme

$$\begin{aligned} q_A : H_1(A \hookrightarrow S^4, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z}_4, \\ [x] &\longmapsto \varepsilon(x) + 2A \circ M \pmod{4}, \end{aligned}$$

où M est une membrane pour x et $\varepsilon(x)$ est l'obstruction à étendre le fibré normal de x dans T^2 en un sous fibré de rang 1 du fibré normal de M dans F_2 .

Puisque le voisinage de α dans T^2 est annulaire, l'obstruction $\varepsilon(\alpha)$ est paire et égale à $2\theta(\alpha)$ où $\theta(\alpha)$ est la somme des indices des zéros d'un champ de vecteurs normal à M et normal à α dans le tore.

Un calcul simple donne : $q_A(\alpha) = 2.2 + 0 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$.

Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ ne contient que des ovals, q_A s'annule sur une moitié de l'ensemble des générateurs. On en déduit ([6, Lemme 2, p. 100]) que l'invariant $K(A)$ est nul. En conséquence :

$$\begin{aligned} 2(P - N) &\equiv k^2 \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est pair ;} \\ 2(P - N) + 1 &\equiv k^2 \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est une $(M-1)$ -courbe alors la surface d'Arnold associée contient un $\mathbb{R}P^2$. Comme l'invariant de Brown est additif par somme connexe il suffit de calculer cet invariant pour $\mathbb{R}P^2$. On trouve $K(\mathbb{R}P^2) = 1$ ou 7 , donc $2K(\mathbb{R}P^2) \equiv \pm 2 \pmod{16}$. On en déduit les congruences :

$$\begin{aligned} 2(P - N) &\equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est pair;} \\ 2(P - N) + 1 &\equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ contient deux méridiens, l'invariant de Brown est non nul.

La bague est orientable (voir la Figure 6). Dans ce cas-là on peut calculer la valeur de $q_A(\alpha)$ en se servant du diviseur exceptionnel pour construire une membrane à α . On trouve $q_A(\alpha) = 2$ et $q_A(\beta) = 0$ ou 2 car A est orientable le long de β . Donc $K(A) \equiv 0$ ou 4 .

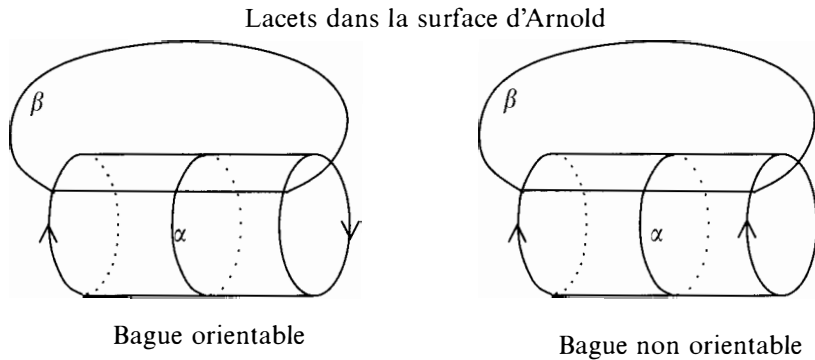


FIGURE 6. Bagues dans le tore réel.

La bague est désorientante. D'après le calcul précédent $q_A(\alpha) = 2$ et $q_A(\beta) = 1$ ou 3 car la surface A n'est plus orientable le long de β . Donc $K(A) \equiv 2$ ou 6 .

On a alors la congruence :

$$2(P - N) \equiv k^2 + \begin{cases} 0 \\ \pm 4 \\ 8 \end{cases} \pmod{16}.$$

Autrement dit : $2(P - N) \equiv k^2 \pmod{4}$.

7. Lemme combinatoire

Soit γ une courbe ouverte et lisse dans le plan \mathbb{R}^2 coupant l'axe horizontal en $2k$ points et telle que les deux branches infinies aient même asymptote horizontale.

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUE

Séparons γ en deux moitiés γ^+ et γ^- telle que γ^+ soit la trace de γ dans le demi-plan supérieur et γ^- la trace de γ dans le demi-plan inférieur. Doublons ensuite les moitiés γ^+ et γ^- par une symétrie par rapport à l'axe horizontal de manière à obtenir deux courbes symétriques γ_1 et γ_2 . En projectivisant la plan \mathbb{R}^2 nous obtenons des courbes fermées, chacune formées de k ovals, et récupérons la définition d'ovale pair et impair. Notons δ_1 et δ_2 la différence entre les ovals pair et impair des courbes γ_1 et γ_2 .

LEMME 9. *Les quantités δ_1 et δ_2 sont égales.*

Preuve. Considérons φ l'isotopie dans \mathbb{R}^2 qui relie la courbe γ à l'asymptote horizontale. Cette isotopie peut se réduire en une succession de mouvements élémentaires qui fait apparaître à chaque étape un 2-gone entre la courbe $\varphi(t)$ et l'axe horizontal.

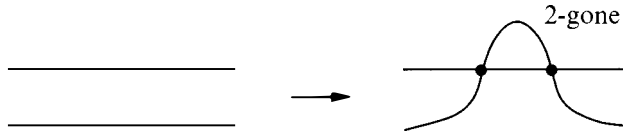


FIGURE 7. Début de l'isotopie.

Le premier mouvement apparaît en Figure 7 où l'on voit se créer un ovale pair pour la courbe $\gamma_1(t)$ et un ovale pair pour la courbe $\gamma_2(t)$. Puis deux mouvements suivent selon le cours de l'isotopie : ce sont les mouvements M_1 et M_2 représentés en Figure 8.

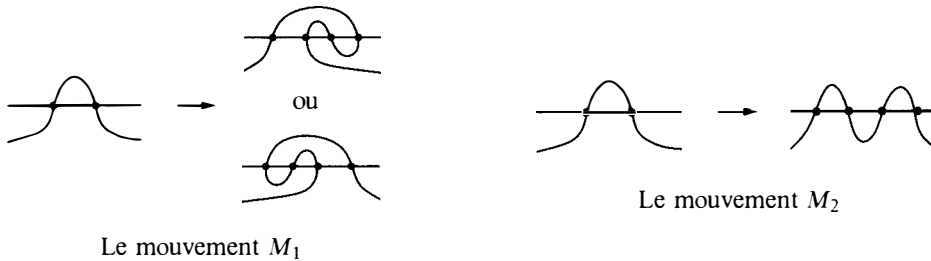


FIGURE 8. Les mouvements M_1 et M_2 .

Le mouvement M_1 fait simultanément apparaître un ovale impair aux deux courbes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ tandis que le mouvement M_2 fait apparaître un ovale pair à chacune des courbes. Ainsi les quantités δ_1 et δ_2 augmentent en même temps. Pour continuer l'isotopie il suffit de se choisir un petit arc sur la courbe $\varphi(t)$ et de produire un des deux mouvements M_1 ou M_2 . Ainsi s'il y a création d'un ovale pair ou impair sur la courbe $\gamma_1(t)$ il en est de même pour la courbe $\gamma_2(t)$. Par conséquent les quantités $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$ varient en même temps, ce qui prouve le lemme. \square

Soit C une courbe lisse fermée coupant l'axe horizontal en $2k$ points, $k > 1$. En reprenant la construction et les notations du lemme ci-dessus, supposons que la courbe C_2 fabriquée à partir de C^- , soit formée de k ovals emboîtés. Par conséquent $\delta_2 = 0$ si k est pair et $\delta_2 = 1$ si k est impair.

LEMME 10. $\delta_1 = 2$ si k est pair, et $\delta_1 = 1$ si k est impair.

Preuve. Comme pour la preuve précédente, considérons l'isotopie φ qui relie la courbe C à un cercle S^1 coupant l'axe horizontal en deux points. L'isotopie peut se décomposer en une série finie d'un seul mouvement, le mouvement M_1 de la Figure 9.

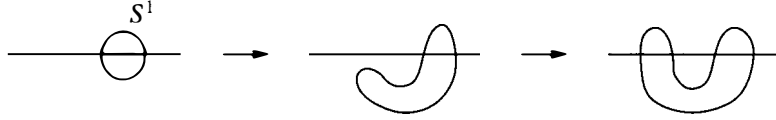


FIGURE 9. Le mouvement M_1 .

Prouvons le lemme pour le cas où k est pair. Le cas impair se résoud par des arguments de même nature.

À l'issue du premier mouvement M_1 on a $\delta_1(\epsilon) = 2$. Pour poursuivre l'isotopie, il faut juste se choisir un petit segment sur la partie $C^+(t)$ et lui appliquer le mouvement M_1 de manière à être, ou à venir embrasser la partie $C^-(t)$. Ce processus crée toujours sur $C_1(t)$ et un oval pair et un ovale impair, ce qui n'affecte pas la quantité $\delta_1(\epsilon)$. \square

8. Le cas où la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est non séparante

Examinons le cas de deux cercles fixes. La courbe quotient est alors maximale. Notons par δ la différence entre le nombre des ovales invariants pairs et impairs de la courbe $X_{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 11. *Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est maximale alors la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est non séparante et*

$$\begin{aligned} p - n &\equiv k^2 + \delta \pmod{4}, & \text{si } k \text{ est pair ;} \\ p - n &\equiv k^2 + \delta + \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases} \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Preuve. Nous partons de la bouteille $\Sigma = Kl^2$ où sont conservés les ovales de $X_{\mathbb{R}}$. Notons \mathcal{T} le tore obtenu à l'aide de $X \setminus X_{\mathbb{R}}$ auquel nous collons des disques abstraits le long du bord. Nous conservons aussi sur \mathcal{T} les ovales qui proviennent du bord $X \setminus X_{\mathbb{R}}$, autrement dit les deux copies de $X_{\mathbb{R}}$. L'involution conj de $X \setminus X_{\mathbb{R}}$ se prolonge en une autre involution, notée encore conj , sur le tore \mathcal{T} . Le tore \mathcal{T} ainsi défini est le revêtement des orientations de $\Sigma = Kl^2$ et conj est l'action de ce revêtement. Nous remontons à \mathcal{T} l'ensemble des points fixes de I sur Σ . Pour retrouver la courbe miroir il suffit de coller à \mathcal{T} des tubes reliant tous les ovales échangés par conj de telle façon que l'involution du tore se prolonge le long de ces tubes en l'involution sur la surface de Riemann X . Ce travail réalisé, il suffit de suivre l'évolution des relevés des cercles fixes pour récupérer la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ et voir si elle est séparante ou non.

Supposons ainsi que l'involution I laisse deux cercles fixes sur Kl^2 et regardons notre bouteille comme la somme connexe de deux plans projectifs réels autour de chacun des deux points fixes isolés κ . Passons au revêtement double : chaque plan projectif se relève en une sphère, et le tube qui réalise la somme connexe se relève en deux tubes. Nous obtenons un tore et connaissons sur ce tore l'action de conj (voir la Figure 10 : les points reliés par des lignes pointillées sont échangés par conj et indiquent comment agit l'involution).

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUE

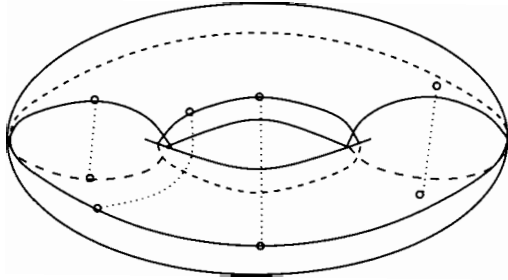


FIGURE 10. Action (en pointillé) de l'involution sur le tore \mathcal{T} .

Collons à présent des tubes reliant deux ovals échangés par l'involution sur le tore. L'action de l'involution impose de twister ces tubes comme l'indique la Figure 11.

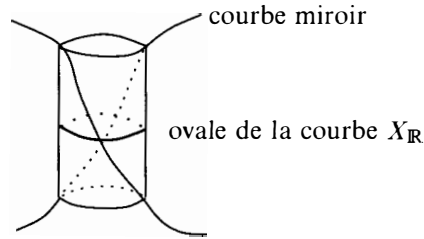


FIGURE 11. Torsade du tube autour d'un ovale de $X_{\mathbb{R}}$.

Il est maintenant aisé de remarquer que la courbe miroir est toujours non séparante : on prend une extrémité d'un petit segment transverse à la courbe miroir. Il suffit d'emprunter un tube twisté pour arriver à rejoindre l'autre extrémité du segment.

Si k est pair, rappelons que les cercles fixes produisent soit deux ovals disjoints, soient deux ovals emboîtés, soient enfin deux méridiens. Dans les trois cas un calcul direct montre que

$$p - n = 2(P - N) + \delta + \begin{cases} +0 \\ -4. \end{cases}$$

On utilise les congruences de la Section 6 pour conclure.

Si k est impair les deux cercles fixes produisent le méridien et un ovale. Ce dernier, suivant la topologie de la courbe miroir, donne un ovale pair où un ovale impair. On trouve, par un calcul direct, que $p - n = 2(P - N) \pm 2 + \delta$ où le ± 2 provient de l'ovale fournit par un des cercles fixes, qui est compté comme un ovale pair ou impair, et dont il faut retrancher sa contribution à la quantité $2(P - N)$. On se reporte encore à la Section 6 pour attraper la congruence. \square

Supposons maintenant l'existence d'un seul cercle fixe. Dans ce cas la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est non séparante : c'est une $(M - 1)$ -courbe. On a la Proposition 12.

PROPOSITION 12. *Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est non séparante alors la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est un nid de k ovals et*

$$p - n \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}.$$

Preuve. Comme pour la proposition précédente nous relevons au revêtement double le cercle fixe de la bouteille de Klein. L'action que nous récupérons est celle décrite par : $(\beta \sim \pi + \beta, \alpha \sim -\alpha)$ où α et β sont les deux angles qui paramétrisent le tore.

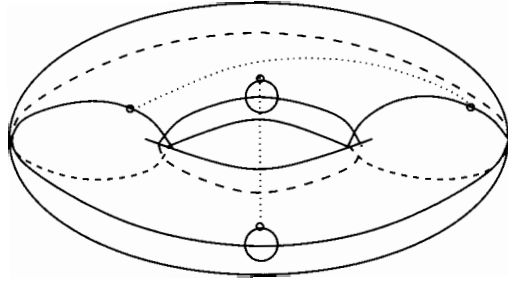


FIGURE 12. Action (en pointillé) de l'involution sur le tore.

Afin de reconstituer la courbe X nous recollons des tubes en prenant garde de conserver l'action de l'involution indiquée en Figure 12. Nous donnons à titre d'exemple dans la Figure 13 une reconstitution de la courbe X dans le cas particulier de l'exemple ci-dessus, c'est-à-dire une courbe de degré quatre avec seulement deux ovales placés sur l'axe. Nous voyons clairement que l'image miroir représentée en traits épais est séparante. L'image miroir est formée de deux ovales emboîtés. La représentation de la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ associée est donnée en Figure 14.

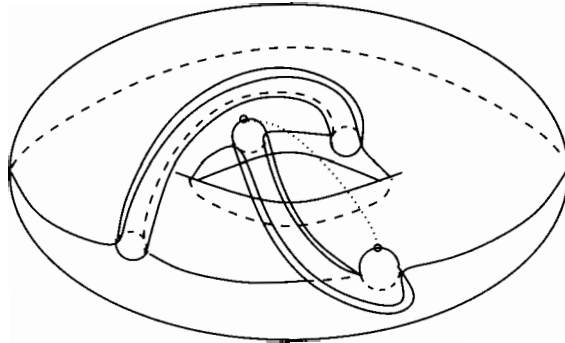
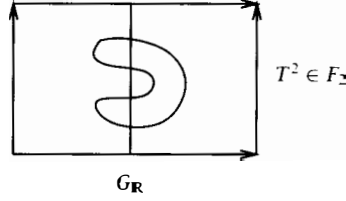


FIGURE 13. Courbe de degré quatre.

Le cas général est identique à celui précisé par la Figure 13 : la courbe miroir est toujours séparante et contient toujours k ovales. Une telle courbe est unique d'après la formule d'orientation complexe de Rokhlin : c'est la courbe formée par un nid de k ovales.

Pour obtenir les congruences de l'énoncé on distingue encore les cas où k est impair ou pair.

Si k est pair le cercle fixe produit un ovale de $Y_{\mathbb{R}}$ (c'est celui qui coupe $G_{\mathbb{R}}$). Par conséquent $p-n = 2(P-N) - 2 + \delta$ où le -2 provient justement de la contribution de cet ovale à la quantité $2P$, et qu'il faut retrancher. Puisque la courbe miroir est le nid de profondeur k , on utilise le Lemme 10 pour calculer $\delta = \delta(\text{nid de } k \text{ ovales}) = 2$. On utilise ensuite la congruence $2(P-N) \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}$ de la Section 6 pour conclure.


 FIGURE 14. Jumeau de la courbe symétrique $\langle 2 \rangle$.

Si k est impair on a toujours la relation $p-n = 2(P-N) + \delta$. Ici encore, l'unique cercle fixe produit l'unique méridien de $Y_{\mathbb{R}}$. On calcule alors $\delta = \delta(\text{nid de } k \text{ ovals}) = 1$ à partir du Lemme 9. Puis on utilise la congruence $2(P-N) + 1 \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}$ de la Section 6, ce qui achève la preuve. \square

9. Le cas où la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est séparante.

Supposons dans un second temps que la $(M-2)$ -courbe symétrique soit séparante. La surface Σ est maintenant un tore T^2 possédant un ou deux cercles fixes comme l'indique la liste de nos involutions. Il est facile de voir si la courbe miroir est séparante car la surface X s'obtient en prenant deux exemplaires du tore T^2 et en reliant chaque ovale d'une copie du tore à son jumeau sur l'autre copie au moyen d'un tube standard. Ainsi la courbe miroir est séparante si et seulement si l'ensemble $\text{Fix}(I)$ sépare le tore. De plus si la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est séparante sa topologie est entièrement déterminée grâce aux formules d'orientations complexes de Rokhlin [12] selon qu'un des deux cercles fixes traverse des ovals de $X_{\mathbb{R}}$ ou pas :

- (i) un nid de k ovals si les deux cercles fixes traversent des ovals ou ;
- (ii) la courbe symétrique séparante de $k+2$ ovals : $2 \sqcup \underbrace{1 \langle \dots 1 \langle 2 \rangle \rangle}_{k-2}$.

On appellera cette dernière courbe la $(k+2)$ -courbe.

Dans le cas de deux cercles fixes, la courbe quotient $Y_{\mathbb{R}}$ est maximale. Elle devient une $(M-1)$ -courbe dans le cas d'un seul. On énonce alors deux propositions.

PROPOSITION 13. *Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est séparante alors la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est séparante et :*

$$\begin{aligned} p-n &\equiv k^2 \pmod{4}, & \text{si } k \text{ est pair;} \\ p-n &\equiv k^2 \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

PROPOSITION 14. *Si la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ est non séparante alors la courbe miroir $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est non séparante et*

$$\begin{aligned} p-n &\equiv k^2 + \delta + \begin{cases} +0 \\ +4 \end{cases} \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est pair;} \\ p-n &\equiv k^2 + \delta + \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases} \pmod{16}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Preuve. Nous nous contentons de prouver les congruences pour le cas où k est impair. Supposons que la courbe miroir soit séparante. On a alors la congruence

$2(P - N) + 1 \equiv k^2 \pmod{16}$ pour la courbe $Y_{\mathbb{R}}$. Si l'image miroir est hyperbolique, un des deux cercles fixes constitue le méridien et l'autre un ovale pair. Nous nous trouvons dans les conditions des Lemmes 9 et 10 qui permettent d'écrire : $p - n = 2(P - N) - 2 + (1 + 2)$. Le -2 vient de la contribution dans $2(P - N)$ de l'ovale pair fourni par un cercle fixe et qu'il faut retrancher. Si l'image miroir est la $(k + 2)$ -courbe, deux positions sont alors possibles par rapport à l'axe de symétrie dans $\mathbb{R}P^2$. Elles sont représentées en Figure 15 et notées γ_2 .

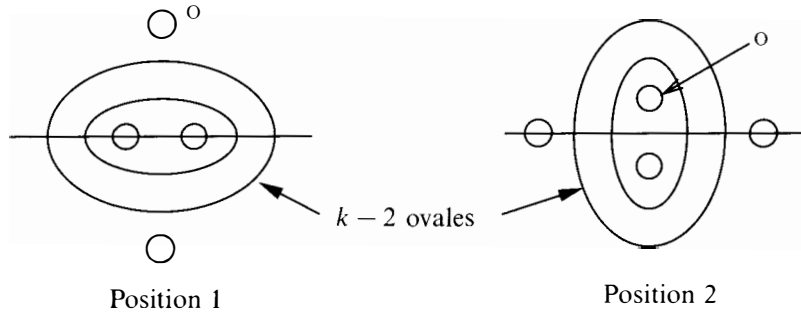


FIGURE 15. Symétries possible pour la $(k + 2)$ -courbe.

Le cercle fixe o qui ne coupe pas l'axe $G_{\mathbb{R}}$ fournit un ovale de $Y_{\mathbb{R}}$. Par conséquent tous les ovales de la Figure 10 qui coupent l'axe vont former, avec ceux de $X_{\mathbb{R}}$, le méridien de $Y_{\mathbb{R}}$. Nous retrouvons ainsi les hypothèses de Lemme 9. Donc $\delta_2 = -1$ pour la première position et $+3$ pour la seconde. La parité de l'ovale o dépend de la position de symétrie de la $(k + 2)$ -courbe :

- (i) si la première position se produit alors le cercle o fournit un ovale impair dans $Y_{\mathbb{R}}$;
- (ii) si la seconde position se produit alors le cercle o fournit un ovale pair dans $Y_{\mathbb{R}}$.

Dans le premier cas on calcule :

$$\begin{aligned} p - n &= 2(P - N) + 2 + \delta_1 \\ &= 2(P - N) + 2 + \delta_2 \\ &= 2(P - N) + 1. \end{aligned}$$

Dans le deuxième on calcule

$$\begin{aligned} p - n &= 2(P - N) - 2 + \delta_1 \\ &= 2(P - N) - 2 + \delta_2 \\ &= 2(P - N) - 2 + 3 \\ &= 2(P - N) + 1, \end{aligned}$$

ce qui prouve la congruence de la Proposition 13.

Supposons à présent que la courbe miroir soit non séparante. L'unique cercle fixe fournit le méridien. Cela a pour conséquence que la courbe quotient $Y_{\mathbb{R}}$ soit une $(M - 1)$ -courbe et ainsi de récupérer la congruence : $2(P - N) + 1 \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}$. De plus on a : $p - n = 2(P - N) + \delta_1$. Nous ne pouvons contrôler δ_1 car nous ignorons la topologie de l'image miroir. On retrouve la congruence annoncée. \square

TOPOLOGIE DES $(M - 2)$ -COURBES RÉELLES SYMÉTRIQUE

10. Preuve du théorème

Nous résumons par le tableau suivant les résultats précédents.

$X_{\mathbb{R}}$ non séparante	$X_{\mathbb{R}}$ séparante
$Y_{\mathbb{R}}$ est maximal et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est non séparante	$Y_{\mathbb{R}}$ est séparant et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est séparante
$Y_{\mathbb{R}}$ est non séparant et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est un nid et $p - n \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}$.	$Y_{\mathbb{R}}$ est non séparant et $\widetilde{X}_{\mathbb{R}}$ est non séparante

Formons l'hypothèse $\mathcal{H} : p - n \equiv k^2 \pmod{4}$, autrement dit $p - n - k^2 \equiv 0, \pm 4, +8 \pmod{16}$.

(1) Supposons que la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ soit non séparante.

Nous sommes dans le cadre de la Proposition 12 ou 14. Or la Proposition 14 affirme que $p - n \equiv k^2 \pm 2 \pmod{16}$, ce qui est en contradiction avec \mathcal{H} . Par suite la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est séparante, puisque c'est une condition de la Proposition 14.

(2) Supposons que la courbe miroir soit séparante.

Nous sommes maintenant dans le cadre de la Proposition 12 ou 13. Là encore l'énoncé 12 est en contradiction avec notre hypothèse \mathcal{H} . On en déduit à nouveau que la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est séparante. En combinant avec le Lemme 5, on obtient que le jumeau est séparant.

(3) Si la courbe $X_{\mathbb{R}}$ est non séparante alors d'après la Proposition 11 c'est la courbe $Y_{\mathbb{R}}$ qui l'est.

Enfin, on trouve la preuve des Remarques 1 et 3 en combinant les énoncés du tableau. \square

Remerciements. Je suis reconnaissant à Thomas Fiedler et à Stepan Orevkov de m'avoir fait partager leurs visions profondes de la géométrie au cours de longues et nombreuses discussions.

Références

1. V. I. ARNOLD, 'The situation of ovals of real plane algebraic curves, the involutions of 4-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms', *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971) 169-176.
2. E. BUJALANCE, A. F. COSTA, S. M. NATANZON and D. SIGERMAN, 'Involutions of compact Klein surfaces', *Math. Z.* 211 (1992) 461-478.
3. TH. FIEDLER, 'Pencil of lines and the topology of real algebraic curves', *Math. USSR Izv.* 21 (1983) 161-170.
4. TH. FIEDLER, 'Topologie des courbes algébriques réelles symétriques', preprint, Lab. Emile Picard (Tlse).
5. D. A. GUDKOV, *The topology of real projective algebraic varieties*, *Russian Math. Surveys* 29 (1974) 1-79.
6. L. GUILLOU and A. MARIN, 'Une extension d'un théorème de Rokhlin sur la signature', *A la recherche de la topologie perdue*, Progr. Math. 62 (Birkhauser, 1986) 97-118.
7. A. HARNACK, 'Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Kurven', *Math. Ann.* 10 (1876) 189-199.
8. I. ITENBERG and V. ITENBERG, 'Symmetric sextics in the real projective plane and auxiliary conics', *Zap. Nauchn. Sem. POMI* 279, *Geometry and topology* (2001) 154-167 (in Russian).
9. V. M. KHARLAMOV, 'Additional congruences for the Euler characteristic of even dimensional real algebraic varieties', *Funct. Anal. Appl.* 9 (1975) 134-141.

SEBASTIEN TRILLES

10. A. MARIN, 'Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles', *Publ. Math. Univ. Paris* 7 9 (1980) 51–86.
11. V. A. ROKHLIN, 'Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem: I. II', *Funct. Anal. Appl.* 6 (1972) 301–306; 7 (1973) 163–164.
12. V. A. ROKHLIN, 'Complex topological characteristics of real algebraic curves', *Russian Math. Surveys* 33 (1978) 85–98.
13. W. SCHERRER, 'Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich', *Comment. Math. Helv.* 1 (1929) 69–119.
14. O. Y. VIRO, 'Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years', *Russian Math. Surveys* 41 (1986) 55–82.
15. G. WILSON, 'Hilbert's sixteenth problem', *Topology* 17 (1978) 53–73.
16. V. I. ZVONILOV, 'Complex topological invariants of real algebraic curves on a hyperboloid and on an ellipsoid', *St Petersburg Math. J.* 3 (1992) 1023–1042.

Sébastien Trilles
Laboratoire Emile Picard